# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Адилжанова С.А., Тюлепбердинова Г.А.
*Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби,*
*г. Алматы, Казахстан*
asaltanat81@mail.ru, tyulepberdinova@mail.ru

В данной статье обсуждается вопросы современного математического моделирования различных процессов с точки зрения теории обратных задач. Приведены примеры обратных задач, обсуждены их основные особенности и перспективы использования в моделировании.

В различных областях науки и техники с целью познания закономерностей работы некоторого объекта или природного явления проводятся эксперименты самого различного вида. Цель эксперимента - выявление главных закономерностей явления и формирование на его основе некоторой математической модели. Очень часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо принципиально недоступен для наблюдения, либо проведение такого эксперимента дорого. Примерами таковых могут служить эксперименты по изучению внутреннего строения Земли, на основе которых можно было бы прогнозировать месторождения полезных ископаемых, предсказывать время и место разрушительных землетрясений. Отметим, что глубина самых глубоких шахт, пробуренных при помощи современнейшего оборудования, не превышает 20 км, а средний радиус Земли равен 6371 км. Таким образом, для непосредственных наблюдений колебаний Земли доступна лишь небольшая ее приповерхностная часть. При этом необходимо делать заключение о свойствах Земли (например, об изменении ее плотности с глубиной) по измеренным в ходе эксперимента косвенным проявлениям. Похожая ситуация возникает в проблемах неразрушающего контроля изделий и конструкций, когда требуется выявить дефект (трещину или полость) внутри работающего объекта (самолета, ракеты или ядерного реактора).

Другой пример - это медицинские исследования, направленные на выявление патологий внутренних органов человека. С открытием рентгеновских лучей человечество приобрело мощный инструмент исследования грудной клетки, костей, пищеварительного тракта, но в силу их неблагоприятного воздействия на ткани продолжались поиски менее вредного и более информативного способа изучения органов человека. Таким способом в настоящее время является ультразвуковое исследование (УЗИ), широко применяемое в медицинской практике и позволяющее достаточно просто выявлять патологии различных органов. В этом случае объект исследования также недоступен для непосредственного изучения. Мы судим о структуре и размерах органов лишь на основе косвенных данных измерений. В основе этого способа лежит анализ отраженных от органа волн.

У описанных выше примеров есть нечто общее - мы хотим определить причины, если известны полученные в результате экспериментов или наблюдений следствия. С точки зрения соотношения причина-следствие все задачи математического моделирования можно условно разделить на два больших класса: прямые задачи (известны причины, необходимо найти следствия) и обратные (известны следствия, нужно найти причины). К прямым задачам относятся, например, задачи расчета механических, тепловых, электромагнитных полей для тел, свойства которых и конфигурация известны. Эти задачи к настоящему времени достаточно хорошо изучены и составляют сущность одного из важнейших разделов современной математики - уравнений математической физики или уравнений в частных производных. Первые работы в этой области были написаны более 200 лет назад, и с тех пор накоплено немало результатов, позволяющих, например, исследовать свойства решений, не решая самих уравнений, исследовать вопросы существования и единственности решений, сходимости различных приближенных методов.

К обратным задачам относят задачи определения некоторых физических свойств объектов, таких, как плотность, коэффициент теплопроводности, упругие модули в зависимости от координат или в виде функций других параметров. Процедура решения таких задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, связана с преодолением серьезных математических трудностей. Успех ее сильно зависит как от качества и количества полученной из эксперимента информации, так и от способа ее обработки. Заметим, что без умения решать прямые задачи невозможно подойти к обратным.

Решение обратных задач проводится, как правило, в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта. Оно состоит в определении либо коэффициентов дифференциальных уравнений, либо области, в которой действует оператор, либо начальных условий, либо сочетания приведенных выше причин [1, 2].

Пример 1. Движение материальной точки массы m в соответствии с законом Ньютона описывается дифференциальным уравнением

Пример 2. Предположим, что в пространстве расположено недоступное для непосредственного наблюдения тело. Однако его можно облучать с различных сторон и регистрировать тень на некоторой плоскости a, перпендикулярной направлению облучения. Обратная задача состоит в определении формы тела по семейству его теней.

Таким образом, в результате облучения по разным направлениям мы знаем интегралы от функции f (x) по всевозможным прямым L. Обратная задача состоит в определении функции f (x) по совокупности этих интегралов. Решение этой математической проблемы составляет фундамент современной компьютерной томографии [3].

Обратные задачи обладают рядом неприятных с математической точки зрения особенностей. Во-первых, они, как правило, нелинейны, то есть неизвестная функция или неизвестный параметр входит в операторное или функциональное уравнение нелинейным образом. Во-вторых, решения обратных задач обычно неединственны. Для обеспечения единственности часто необходимо требовать избыточности экспериментальной информации, например при определении формы полости в теле при помощи регистрации отраженных волн необходимо знание отраженного поля в некотором диапазоне изменения частоты w0 k [w1 , w2]. На практике же мы можем измерить отраженное поле в достаточно большом, но конечном наборе частот на отрезке [w1 , w2], что может привести к неединственности восстановления формы полости, появлению посторонних или, как называют их в ультразвуковой диагностике, "фантомных" решений.

В-третьих, обратные задачи не являются корректными. Понятие корректной задачи, являющееся одним из важнейших понятий современной математики, было сформулировано французским математиком Ж. Адамаром (1923 год). Оно означает, что решение задачи существует и единственно на некотором множестве, а также непрерывно зависит от входных данных. Смысл первого условия (существование решения) состоит в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, исключающих возможность решения задачи. Второе условие (единственность) означает, что данных достаточно для однозначной определенности решения задачи. Третье условие (непрерывная зависимость от исходных данных) означает, что малые изменения в данных приводят к малым изменениям в решении. Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными. В обратных задачах, как правило, отсутствует непрерывная зависимость от исходных данных в отличие от прямых задач. Поскольку входной информацией в обратных задачах являются экспериментальные данные, определяемые с некоторой погрешностью, которую не всегда можно оценить, то решение обратной задачи с "испорченными" входными данными может сильно отличаться от точного решения. В этой ситуации на первый план выходят способы математической обработки входной информации. Большой вклад в развитие математической теории некорректных задач внес отечественный математик академик А.Н. Тихонов [4], который определил, как надо понимать решение некорректной задачи. Он предложил один из возможных способов регуляризации некорректной задачи, состоящий в сведении исходной задачи решения некоторого операторного уравнения к проблеме отыскания минимума некоторого функционала.

Обратные задачи математической физики - бурно развивающаяся в настоящее время часть современной математики, сформировавшаяся в основном в последние 35-40 лет, хотя первые работы относятся к 30-м годам нашего столетия. Все большая часть математических моделей приобретает стройность и достоверность как раз благодаря достижениям теории обратных задач. Так, с ее помощью достигнут впечатляющий прогресс в компьютерной томографии [3]. Стремительное распространение этого метода обусловлено его эффективным применением в медицине, биологии, диагностике плазмы. Внедрение метода компьютерной томографии произвело революцию в медицинской диагностике и электронной микроскопии биологических макромолекул. Создание компьютерных томографов (А. Кормак и Г.Н. Хаунсфилд) и их применение в биохимии (А. Клуг) отмечены Нобелевскими премиями (1979 и 1982 годы). Отметим, что основные математические задачи вычислительной диагностики плазмы сводятся к решению операторных уравнений 1-го рода (подобных уравнению [5]). При нахождении их приближенных решений необходимо использовать методы регуляризации, позволяющие учитывать дополнительную информацию о решении.

Первые обратные задачи были решены в связи с проблемами геофизики и разведки полезных ископаемых. В настоящее время с все большим усложнением моделей, используемых в геофизике, совершенствуется и методика решений обратных задач. Метод акустической разведки полезных ископаемых несравнимо дешевле простого бурения пробных скважин. Вместе с тем геоакустика дает возможность получать более точную информацию о состоянии недр, а звуковые волны являются, по-видимому, наиболее пригодным для локации недр видом возмущения (в последние годы интенсивно обсуждается проект глобального вибрационного просвечивания Земли с целью уточнения ее строения). Обратные задачи геоакустики гораздо труднее, нежели задачи математической томографии, в силу сложного строения рассеяного волнового поля из-за наличия многих типов волн.

Задачи ультразвукового неразрушающего контроля также требуют совершенствования моделей в связи с широким внедрением в практику композиционных материалов, которые обладают различными механическими свойствами по различным направлениям (анизотропией), что влечет за собой усложнение алгоритмов решения обратных задач рассеяния. Для этого класса задач очень важен учет свободной границы (для обнаружения приповерхностных дефектов) и анизотропии материала модели. Обратные задачи об определении формы дефекта приводят к последовательному решению систем интегральных уравнений 1-го рода [6] либо к решению некоторого нелинейного дифференциального уравнения [7]. В последнее время задачи, возникающие в этой области, привлекают внимание математиков-теоретиков.

Исследования в области обратных и некорректных задач также ведутся в Казахстане [8]. Полученные улучшенные оценки скорости сходимости рассмотренных градиентных методов очень важны для практики, так как позволяют согласовать ошибку входных данных с номером итераций. Для практического применения предложен новый способ выведения градиента функционала для дискретной задачи акустики, позволяющий считать с большей точностью. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в разработанной технике выведения оценок и градиента функционалов на дискретном уровне [9].

Это связано как с новыми постановками и новыми моделями, так и с развитием методов их решения.

Наконец, отметим, что акустическое зондирование Мирового океана является методом, не знающим конкуренции, поскольку радиоволны плохо распространяются в морской воде из-за ее хорошей электропроводности. Например, свет мощного лазера проникает в океанские глубины на расстояние порядка сотен метров, тогда как звук даже не очень сильного взрыва может быть зарегистрирован на расстоянии десятков тысяч километров. Процессы, происходящие в океане, оказывают определяющее влияние на климат многих районов Земли. Кроме того, океан, малоисследованный по существу, является чрезвычайно богатым источником различных сырьевых ресурсов. Специфика обратных задач акустики океана - достаточно сильная зашумленность полезного сигнала, а также необходимость при решении обрабатывать огромные массивы данных.

Литература

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 261 с.

2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.

3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.

4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

5. Ильинский Н.Б. Обратные краевые задачи и их приложения // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 4. С. 105-110.

6. Ватульян А.О., Коренский С.А. О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Докл. РАН. 1995. Т. 334, № 6. С. 753-755.

7. Боев Н.В., Ватульян А.О., Сумбатян М.А. Восстановление контура препятствия по характеристикам рассеянного акустического поля в коротковолновой области // Акуст. журн. 1997. № 4. С. 458-462.

8. Кабанихин С. И., Искаков К. Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. - Алматы: КазНПУ имени Абая, 2007. - 330 с.

9. Нурсеитова А. Т., Нурсеитов Д. Б., Тюлепбердинова Г. А. Численное решение одномерной обратной задачи акустики методом итераций Ландвебера // Вестник КазНУ: Серия «математика, механика, информатика». - 2010. - Т. 64, № 2. - С. 79-86.